文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4732 /（中图刊号）：561GL001

一种三维坐标转换的粗差探测新方法

邱德超
云浮市自然资源综合服务中心
DOI:10.12238/gmsm.v7i8.1947

[摘　要] 三维坐标转换中原坐标及目标坐标观测值含有的粗差会影响转换参数的解算精度,而准确剔除粗差可以提升转换参数的解算精度。以往的三维坐标转换粗差定位精度不够准确故无法确定粗差所处的具体分量。本文使用调整检验统计量的方法增加检验统计量的个数后提升了粗差的识别度并为三维坐标转换的粗差探测提供了一种新方法。
[关键词] 三维坐标转换；Partial EIV模型；总体最小二乘法；粗差探测
中图分类号：O434.12　文献标识码：A

A New Method of Gross Error Detection for 3D Coordinate Transformation

Dechao Qiu
Yunfu City Natural Resources Comprehensive Service Center Yunfu City

[Abstract] In the three-dimensional coordinate transformation, the gross error of the original coordinates and the target coordinate observations will affect the calculation accuracy of the conversion parameters. Accurately eliminating the gross error can improve the resolution accuracy of the conversion parameters. In view of the fact that the accuracy of the three-dimensional coordinate conversion gross error positioning is not accurate enough, it is impossible to determine the specific component of the gross error. In this paper, the method of adjusting test statistics and increasing the number of test statistics is used to improve the recognition of gross error effectively, and a new method is provided for gross error detection of three-dimensional coordinate transformation.
[Key words] Three-dimensional coordinate transformation; Partial EIV model; Overall least squares; Gross error detection

前言

GNSS技术在测量时经常遇到空间直角坐标系之间的转换，大地坐标系间的相互转换及摄影测量工作中三维坐标转换是必不可少的。陆珏、陈义等人[1]对于小角度空间直角坐标转换中的适用性及优越性问题对比分析了总体最小二乘与最小二乘方法得出了总体最小二乘能够得到更高精度的参数估值；袁庆等人[2]分别使用最小二乘法、混合总体最小二乘法[3]和加权总体最小二乘法[4-5]解算小角度的三维坐标转换得出了加权总体最小二乘法可以得到比较合理的计算结果。

取得原坐标及目标坐标的观测值时必然会受粗差的影响，但是含有粗差的观测向量或系数矩阵在进行平差计算时将大幅度降低转换参数的解算精度。关于三维坐标转换中的粗差探测问题使用均值漂移模式下的数据探测法进行粗差的识别与定位，但无法精确判断含有粗差的观测值[6]。该文重新推导计算检验统计量和提升统计检验量数目后较为有效地提升了三维坐标转换中粗差的识别度。

1 三维坐标转换模型

三维坐标转换模型：

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = (1+m)\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中 Δx ，Δy ，Δz 为3个平移参数，$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 为3个旋转参数，m为尺度变化参数，x_t ，y_t ，z_t 是目标坐标系坐标值，x_s ，y_s ，z_s 是原坐标系坐标值。为了计算方便令 k=1+m，$\varphi_1 = k\varepsilon_x, \varphi_2 = k\varepsilon_y, \varphi_3 = k\varepsilon_z$ ，则式(1)变形为：

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s & 0 & -z_s & y_s & 1 & 0 & 0 \\ y_s & z_s & 0 & -x_s & 0 & 1 & 0 \\ z_s & -y_s & x_s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (2)$$

当系数矩阵存在误差时使用总体最小二乘法进行求解,因此将式(2)改写为

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}_A)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}_y \quad (3)$$

式中 $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_t & y_t & z_t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是3n×1维的目标坐标系坐标值,n是三维坐标转换公共点的个数。

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_s & 0 & -z_s & y_s & 1 & 0 & 0 \\ y_s & z_s & 0 & -x_s & 0 & 1 & 0 \\ z_s & -y_s & x_s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 3n×7 维的系数矩阵，$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} k & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是三维坐标转换的7个转换参数，$\boldsymbol{E}_A$ 和 $\boldsymbol{e}_y$ 分别为 $3n\times 7$ 维的系数矩阵改正数和 $3n\times 1$ 维的观测向量改正数。

2 求解三维坐标转换参数

将式(3)转换为如下的Partial EIV模型[7]：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{\beta}^T \otimes \boldsymbol{I}_m)(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{a}}) + \boldsymbol{e}_y \\ &\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{e}_a \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 是由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列拉直后随机元素组成的 $3n\times 1$ 的列向量，$\boldsymbol{e}_a$ 是其对应的 $3n\times 1$ 改正数。$\boldsymbol{h}$ 是由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列拉直后的零元素和常数元素所组成的 $3n\times 1$ 的列向量，$\boldsymbol{B}$ 是构造的 $21n\times 3n$ 的已知矩阵。

未知向量 $\boldsymbol{a}$ 为：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_{s_1} & y_{s_1} & z_{s_1} & \cdots & x_{s_n} & y_{s_n} & z_{s_n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (5)$$

向量 $\boldsymbol{h}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别构造如下：

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1 & \boldsymbol{h}_2 & \boldsymbol{h}_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & \boldsymbol{h}_6 & \boldsymbol{h}_7 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (6)$$

式中 $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2$，$\boldsymbol{h}_3$ 和 $\boldsymbol{h}_4$ 分别为1×3n的向量；$\boldsymbol{h}_5$，$\boldsymbol{h}_6$，$\boldsymbol{h}_7$ 分别是n个 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 向量组成的1×3n的列向量。

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_5^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_6^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_7^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (7)$$

式中：

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_4 = \boldsymbol{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_5 = \boldsymbol{B}_6 = \boldsymbol{B}_7 = \boldsymbol{I}_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式(4)是非线性方程故对其进行线性化处理后将其在 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^0 + \Delta\boldsymbol{\beta}$，$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{a}}^0 + \Delta\overline{\boldsymbol{a}}$ 处线性展开为[8]：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{\beta}^{0^T} \otimes \boldsymbol{I}_{3n})(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{a}}^0) + \Delta\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{a}}^0) + (\boldsymbol{\beta}^{0^T} \otimes \boldsymbol{I}_{3n})\boldsymbol{B}\Delta\overline{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{e}_y \\ &\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}}^0 + \Delta\overline{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{e}_a \end{aligned} \quad (8)$$

表示矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -vec^{-1}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{a}}^0) & -(\boldsymbol{\beta}^{0^{\mathrm{T}}} \otimes \boldsymbol{I}_{3n})\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_{3n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\beta} \\ \Delta\overline{\boldsymbol{a}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\beta}^{0^{\mathrm{T}}} \otimes \boldsymbol{I}_{3n})(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{a}}^0) - \boldsymbol{y} \\ \overline{\boldsymbol{a}}^0 - \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \quad (9)$$

令

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_a \end{bmatrix}; \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\beta} \\ \Delta\overline{\boldsymbol{a}} \end{bmatrix}; \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\beta}^{0^{\mathrm{T}}} \otimes \boldsymbol{I}_{3n})(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{a}}^0) - \boldsymbol{y} \\ \overline{\boldsymbol{a}}^0 - \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -vec^{-1}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{a}}^0) & -(\boldsymbol{\beta}^{0^{\mathrm{T}}} \otimes \boldsymbol{I}_{3\mathrm{n}})\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_{3\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

则式(9)可以简化为：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{L} \quad (10)$$

式中 $\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{L}$ 为改正数。

对式(10)使用 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V} = \min$ 的准则[9-12]进行求解，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 组成的协因数阵。

使用下面的迭代公式解算转换参数：

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{i+1}} = (\boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}_{\mathrm{i}})^{-1}\boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}} \quad (11)$$

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4732 /（中图刊号）：561GL001

基于Partial EIV模型的三维坐标转换总体最小二乘法的具体解算步骤如下：

(1)给已知数据 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{y},\boldsymbol{h},\boldsymbol{Q}_y,\boldsymbol{Q}_a$ 收敛阈值 ε；

(2)赋初值 $\boldsymbol{\beta}^0=\boldsymbol{\beta}_{LS},\overline{\boldsymbol{a}}^0=\boldsymbol{a}$，根据式(9)建立迭代格式；

(3)根据式(10)由 $\boldsymbol{X}_{i+1}=(\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}_i)^{-1}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L}_i$ 计算 $\Delta\boldsymbol{\beta}$ 和 $\Delta\overline{\boldsymbol{a}}$ 后根据 $\boldsymbol{\beta}_{i+1}=\boldsymbol{\beta}_i^0+\Delta\boldsymbol{\beta}_i$，$\overline{\boldsymbol{a}}_{i+1}=\overline{\boldsymbol{a}}_i^0+\Delta\overline{\boldsymbol{a}}_i$ 更新 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 的值；

(4)重复步骤3)直到 $\left\|\boldsymbol{X}_{i+1}-\boldsymbol{X}_i\right\|_2<\varepsilon$，停止迭代，输出参数。

3 粗差探测新方法

对于系数矩阵或观测向量中不可避免存在的粗差可使用数学理论统计学的方法构造统计检验量用来探测粗差并判断其位置。过去的粗差探测方法仅能大致判断某个观测方程中可能存在粗差，但无法确定这些粗差具体是位于原坐标系还是目标坐标系，因此常常需要将该观测方程中源坐标系和目标坐标系的观测值一并剔除[13]。实际工程测量时如果公共观测点数量较少，直接去除带有粗差的观测值的方法可能并不适用，这样一来就迫切需要更为精确的粗差定位方法进行更为有效的统计检验量。进一步全面深入分析统计检验量的特点后重新构造新的统计检验量可以达到更为精确地定位单个粗差位置的良好效果。

使用式(9)(10)计算观测值的残差值 $\boldsymbol{v}_i$。根据协因数传播定律求解 $\boldsymbol{Q}_V$。在单位权方差已知的情况下当观测值中存在粗差时可以使用正态分布进行粗差识别，而当单位权方差未知时则使用F分布来识别观测值中的粗差。

单位权方差已知时使用正态分布方法对观测数据中的粗差进行检测，其检验统计量为：

$$\boldsymbol{W}_i=\frac{|v_i|}{\sigma_0\sqrt{q_{v_{ii}}}}\sim N_{\alpha/2}(0,1) \tag{12}$$

如果 $|\boldsymbol{w}_i|>N_{\alpha/2}(0,1)$ 则该观测值存在粗差。

当单位权方差未知时运用F分布方法检测观测数据中的粗差，其数据探测法的检验统计量为：

$$\mathrm{F}_i=\frac{\boldsymbol{R}/\mathrm{r}}{(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{R})/(m-3n-r)}\sim \mathrm{F}_{1-\alpha,r,m-3n-r} \tag{13}$$

式中 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}$；

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}((\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}_V\boldsymbol{P}\boldsymbol{H})^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}$；$r$ 为粗差的个数；$\boldsymbol{H}$ 为 $6n\times r$ 的已知矩阵，对应粗差处为1，其余为0。

如果 $\left|F_j\right|>F_{1-\alpha,r,m-3n-r}$，则判断该观测值存在粗差。

4 结语

对于三维坐标转换涉及的粗差探测问题，本文重新调整以往的数据探测法统计检验量并增加检验统计量的数量从而有效提升了粗差识别的效率和精度。这为测绘数据的粗差探测问题提供了一种新方法。

[参考文献]

[1]陆珏,陈义,郑波.总体最小二乘方法在三维坐标转换中的应用[J].大地测量与地球动力学,2008,28(5):77-81.

[2]袁庆,楼立志,陈玮娴.加权总体最小二乘在三维基准转换中的应用[J].测绘学报,2011(S1):115-119.

[3]鲁铁定,周世健,王乐洋.混合总体最小二乘的迭代解算算法[J].数据采集与处理,2015(4):802-809.

[4]鲁铁定.总体最小二乘平差理论及其在测绘数据处理中的应用[D].武汉大学,2010.

[5]孔祥元.大地测量学基础[M].武汉:武汉大学出版社,2010.

[6]王铮尧.EIV模型粗差探测方法及应用[D].东华理工大学,2016.

[7]Xu P,Liu J,Shi C.Total least squares adjustment in partial errors-in-variables models:algorithm and statistical analysis[J].Journal of Geodesy,2012,86(8):661-675.

[8]汪奇生,杨根新.PEIV模型参数估计新算法[J].测绘科学技术学报,2016,33(4):341-345.

[9]黄维彬.测量平差的当代进展——近代测量平差[J].测绘通报,1994(2):3-9.

[10]刘经南,曾文宪,徐培亮.整体最小二乘估计的研究进展[J].武汉大学学报(信息科学版),2013,38(05):505-512.

[11]陆元鸿.概率统计[M].上海:华东理工大学出版社,2003.

[12]陶武勇.总体最小二乘粗差探测和定位[D].东华理工大学,2015.

[13]邱德超.PEIV模型的参数估计及其在测绘数据处理中的应用[D].东华理工大学,2018.

作者简介：

邱德超(1991--),男,江西赣州人,测绘工程师,硕士研究生,主要从事大地测量与测绘数据处理研究。