地矿测绘
Geological mining surveying and mapping
第 2 卷◆第 6 期◆版本 1.0◆2019 年 12 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4732

导线测量计算中的坐标误差分配问题

徐兴彬
广东工贸职业技术学院测绘与遥感信息学院
DOI:10.32629/gmsm.v2i6.458

[摘　要] 导线控制测量涉及到坐标增量的误差分配问题。现在的教科书中都是按导线边长进行分配,工作上也按此照搬。作者在教学与工作中发现这种分配方式欠妥,有时会产生较大偏差。因此,本文提出按坐标增量大小进行分配计算的观点,并结合实例予以分析论证,获得科学严密结论。该结论的应用对广大测绘教师的相关课程教学具有正确的引导作用,对野外导线测量生产具有实际的指导意义。
[关键词] 导线测量；误差；结论

1 问题的提出

查阅过去几十年以来的教科书中,导线测量计算涉及坐标增量误差分配时,都是按边长的长短比例进行坐标增量分配。现在我们要研讨的是,这样分配正确合理吗?

2 标准附合导线计算过程

如图2.1所示的标准附合导线,是一种具有两个连接角的经典附合导线。这种导线由于在起始位置和结束位置均各有一个坐标已知点和一条已知方位角边,能够牢牢把控住整个导线测量的误差情况,在实际工作中颇受青睐。

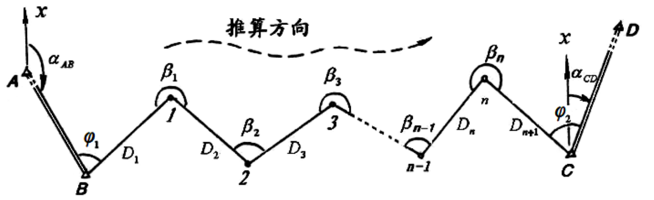

图2.1　附合导线计算示意图

计算时,先将各观测角度进行方位角闭合差改正,再按公式(2.1)计算出各条导线边的坐标增量:

$$\Delta X_i = D_i \times \cos\alpha_i\,,\ \Delta Y_i = D_i \times \sin\alpha_i \tag{2.1}$$

由于存在边长测量误差,从而引起一定的坐标误差。误差大小为:

$$\begin{cases} f_x = \sum_1^{n+1} \Delta X_i - (X_C - X_B) \\ f_y = \sum_1^{n+1} \Delta Y_i - (Y_C - Y_B) \end{cases} \tag{2.2}$$

在一般教科书中,均是按导线边的边长大小来分配坐标增量闭合差,即:

$$v_{\Delta X_i} = -\frac{D_i}{\sum D} \times f_x\,,\ v_{\Delta Y_i} = -\frac{D_i}{\sum D} \times f_y \tag{2.3}$$

但是,作者认为这种分配方式欠妥,应按坐标增量大小来分配改正,即:

$$v_{\Delta X_i} = -\frac{|\Delta X_i|}{\sum|\Delta X|} \times f_x\,,\ v_{\Delta Y_i} = -\frac{|\Delta Y_i|}{\sum|\Delta Y|} \times f_y \tag{2.4}$$

3 误差影响分析举例

为了方便理解,先设计考虑一个最简单的附合导线样例进行计算分析。

图3.1所示的附合导线中,假设只有一个未知导线点1号点,两条导线边长相同,均为100米,测量误差也刚好相同0.02米。图中已完成方位角的改正,B、C为导线两端的两个已知点(设计坐标值如图所示,图中坐标、距离均以米计)。从B点推算1号点时,由于有距离误差 f_1 的存在,使得1号点移到了1´位置；测量D_2时,由于 f_2 的影响,使2号点移到了2´。从图中可以看出,如果没有 f_1、f_2 的影响,2´号点肯定就会落在C点的正确位置。

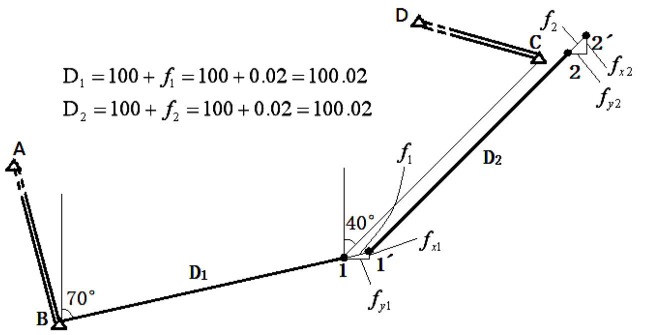

图3.1　附合导线例图

显然,如果没有距离测量误差,我们要获求的未知点1号点的准确坐标应该为:

$$\begin{cases} X_1 = X_B + 100\,\mathrm{Cos}\,70^\circ = 3134.658 \\ Y_1 = Y_B + 100\,\mathrm{Sin}\,70^\circ = 5294.247 \end{cases} \tag{3.1}$$

根据公式(2.1)计算两条导线边的坐标增量为:

$\Delta X_1 = 34.209$　，$\Delta Y_1 = 93.988$　及　$\Delta X_2 = 76.620$　，$\Delta Y_2 = 64.292$

根据公式(2.2)计算坐标增量闭合差为:

$$f_x = 0.023 \quad , \ f_y = 0.032$$

现在,用两种方法进行坐标增量闭合差的分配。

[方法1]按边长大小成比例分配,这是传统的分配方法。

根据公式(2.3)计算坐标增量的改正数之后,计算1号点坐标为:

$$\begin{cases} X_1 = X_B + \Delta X_1 + v_{\Delta X_1} = 3100.456 + 34.209 - 0.012 = 3134.653 \\ Y_1 = Y_B + \Delta Y_1 + v_{\Delta Y_1} = 5200.278 + 93.988 - 0.016 = 5294.250 \end{cases} \tag{3.2}$$

地矿测绘
第 2 卷◆第 6 期◆版本 1.0◆2019 年 12 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4732

这个结果与公式(3.1)的计算结果不相同,X坐标相差5mm,Y坐标相差3mm。

[方法2]按坐标增量大小成比例分配,这是论文提出的新方法。

根据公式(2.4)计算坐标增量的改正数之后,计算1号点坐标为:

$$\begin{cases} X_1 = X_B + \Delta X_1 + v_{\Delta X_1} = 3100.456 + 34.209 - 0.007 = 3134.658 \\ Y_1 = Y_B + \Delta Y_1 + v_{\Delta Y_1} = 5200.278 + 93.988 \text{-} 0.019 = 5294.247 \end{cases} \tag{3.3}$$

这个结果与公式(3.1)的计算结果完全相同!

4 问题实质与结论

观察上例中[方法1]的计算结果,坐标值X相差5mm,Y相差3mm,这相对于20mm/100m的距离测量误差来说,是很可观的。如果是多条导线边长累积下来,则情况会更加严重。

实际上,这个5mm不是误差,而是错误!而且这个错误与导线边的方位角大小紧密相关:如果导线边的方向越接近坐标轴的方向(与X、Y轴平行或垂直),则这个错误会越严重,最大将会达到该导线距离测量的坐标增量方向上的总误差值,而且还有连续传递影响的后果。

可以验证,我们保持上例中的边长长度不变,距离测量的误差也不变,第二条边的方位角40◦不变,将第一条边的方位角70◦改为80◦、89◦、90◦,此时导线方向不断接近坐标横轴方向时,则按[方法1]计算的坐标增量的误差也会不断增加,但按[方法2]计算的结果则一直不变。计算结果见表4.1。表中最后一行是将两条边的方位角均按45◦考虑的计算结果。

表 4.1

方位角选择	准确值 X_1 Y_1	C坐标 X_C Y_C	ΔX_1 ΔY_1	ΔX_2 ΔY_2	f_x f_y	$V_{\Delta X1}$ $V_{\Delta Y1}$	[方法 1] X_1 Y_1	$V_{\Delta X1}$ $V_{\Delta Y1}$	[方法 2] X_1 Y_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
70°,40°	3134.658 5294.247	3211.262 5358.526	34.209 93.988	76.620 64.292	0.023 0.032	-0.012 -0.016	3134.653 5294.250	-0.007 -0.019	3134.658 5294.247
80°,40°	3117.821 5298.759	3194.425 5363.038	17.368 98.500		0.019 0.032	-0.010 -0.016	3117.814 5298.762	-0.004 -0.019	3117.820 5298.759
89°,40°	3102.201 5300.263	3178.805 5364.542	1.746 100.005		0.017 0.033	-0.008 -0.016	3102.194 5300.267	-0.000 -0.020	3102.202 5300.263
90°,40°	3100.456 5300.278	3177.060 5364.557	0 100.020		0.016 0.033	-0.008 -0.016	3100.448 5300.282	0-0.020	3100.456 5300.278
备注	1号点坐标准确值	已知点C坐标	D1坐标增量	D2坐标增量	坐标增量累积差	按边长大小分配	均有差值,最大差8mm	按坐标增量分配	最多差1mm(凑整误差)
45°,45°	3171.167 5270.989	3241.878 5341.700	70.725 70.725	70.725 70.725	0.028 0.028	-0.014 -0.014	3171.167 5270.989	-0.014 -0.014	3171.167 5270.989

表4.1中,将第8栏与第2栏相比可以看出,针对4个方位角70◦、80◦、89◦、90◦中的无论哪一个,当坐标增量误差按边长大小进行分配时,最后计算的未知点(1号点)坐标都是有明显误差的,而且随着导线越接近坐标轴的方向,这个误差越大。但表中最后一行,当导线方向均为45◦时,则[方法1]与[方法2]计算结果完全相同,即无论按距离分配还是按坐标增量分配,都是正确合理的。

问题的实质可以这样理解:因为我们根据公式(2.2)求算坐标增量闭合差 f_x 、 f_y 时,用的是各边的坐标增量累加求和,所以分配这两个闭合差 f_x 、 f_y 时,也应该使用相应的坐标增量来分配。否则,由于导线边方向的任意性,将会导致一定的分配误差(与坐标轴方向越近,误差越大)。

综合上述各种分析,可以得出如下几点结论:

(1)坐标增量误差根据导线边长大小分配时,一般会产生分配误差,而且导线方向越接近坐标轴时,分配误差越大。前一条导线边的分配误差将会对后面各条边的分配持续影响。

(2)如果按坐标增量大小(用“绝对值”)来分配,则不会出现分配误差。这适合于符合导线或闭合导线的各种情况。

(3)对于方位角为±45◦、±135◦的直伸性符合导线,则无论按导线边长分配还是按坐标增量大小来分配,分配计算结果均相同。

最后,引用一个例子,以此来说明当直线的方向靠近坐标轴时,我们选择计算方法的正确性是何等重要。

[例]已知两点坐标为A(23563.231,56908.329)、B(24003.229,56916.272),试计算直线AB的坐标方位角及边长。(坐标单位为米)

[解](1)先计算坐标增量:△X=24003.231-23563.231=440.000米,△Y=56919.272-56911.332=7.940米。这一步是没有问题的,精确到毫米。(2)计算坐标方位角:

$$\alpha_{AB} = \tan^{-1}\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \tan^{-1}\frac{7.940}{440.000} = \tan^{-1}0.018045 = 1^{\circ}02'02'',$$

这也没有问题。

(3)计算边长时可以有三种途径计算:

[途径1]按ΔX、cosα计算,得:

$$S1 = \frac{\Delta X}{\cos\alpha} = \frac{440.000}{0.999837} = 440.072\text{米}$$

[途径2]按ΔY、sinα计算,得:

$$S2 = \frac{\Delta Y}{\sin\alpha} = \frac{7.940}{0.017805} = 445.942\text{米}$$

[途径3]按△X、△Y计算,得:

$$S3 = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{440.000^2 + 7.940^2} = 440.072$$

比较3种途径的计算结果可知,方位角接近于0°或180°时,用cosα计算的精度高。同样可以验证:当方位角近于90°或270°时,用sinα计算的精度高。若采用勾股定理计算(不涉及角度函数值!),则不论象限角值大小,其结果都是正确的。

[参考文献]

[1]张坤宜.《测量技术基础》[J].武汉:武汉大学出版社,2011(8):178.
[2]潘松庆.《测量技术基础》[J].郑州:黄河水利出版社,2012(12):133.
[3]徐兴彬.《基础测绘学》[J].广州:中山大学出版社,2014(8):235-236.